



# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СЕТОК В РЕАКТОРНЫХ РАСЧЕТАХ

О.Ю. КАВУН (МГТУ им. Баумана),  
М.М. ГРИГОРЬЕВ (ФГУП НИПКИИ “Атомэнергопроект”)

*Памяти Григорьева Михаила Матвеевича, предложившего изложенный в данной статье метод сеток, посвящается*



В статье изложен метод решения уравнений переноса нейтронов, реализованного в программном комплексе “РАДУГА/RAINBOW”, использующий модификацию метода конечных разностей – метод сеток [2].

Программный комплекс “РАДУГА/RAINBOW” входит в состав Программного Комплекса “Радуга-ЭУ” – Платформы для динамического моделирования тепловых, атомных и гидроэлектростанций, а также для расчета нестационарных, неизотермических многофазных течений в трубопроводных сетях при транспортировке газо- и нефтепродуктов со сложным химическим составом произвольной конфигурации.

**Ключевые слова:** “РАДУГА/RAINBOW” – Программный комплекс предназначен для моделирования динамических процессов в водо-водяных реакторных установках; “Радуга-ЭУ” – Платформенное решение для динамического моделирования тепловых, атомных и гидроэлектростанций; ТВЭЛ – Тепловыделяющий элемент.

## ВВЕДЕНИЕ

Первая версия изложения метода сеток, приведенного в данной статье, была опубликована в сборнике трудов института “Атомэнергопроект” [1]. Данная статья содержит описание метода сеток с учётом опыта применения указанного метода за период с 1982 г. по настоящее время. Учтён также опыт преподавания численных методов на кафедре Э7 “Ядерные реакторы и установки” МГТУ им. Н.Э. Баумана в части изложения вывода конечно-разностных уравнений метода сеток.

Одним из центральных вопросов конечно-разностного метода является построение расчетной сетки и выбора метода замены дифференциальных операторов их конечно-разностными аналогами, так как правильное решение этих вопросов определяет в основном результативность полученных программ и точность решения исходного уравнения. Выбор сетки и метода аппроксимации определяется многими обстоятельствами, в том числе и опытом разработчика.

Данная работа содержит систематизированное изложение метода решения уравнений переноса нейтронов, реализованного в программном комплексе “РАДУГА/RAINBOW”.

Излагаемый ниже подход является одной из модификаций хорошо известного метода конечных разностей. Для того, чтобы подчеркнуть отличие методики, реализованной в п/к “РАДУГА/RAINBOW” от традиционного подхода, мы используем довольно редко встречающееся в литературе другое название метода конечных разностей – метод сеток [2] (не путать с термином “сеточные методы”).

Для уравнения в частных производных при заданной сетке конечно-разностный аналог уравнения может быть построен различными методами. Основным методом, который используется в данном случае, является метод интерполяции функции полиномом второго порядка. Особенностью предлагаемого подхода является предположение о том, что искомая функция, удовлетворяющая параболическому уравнению, является непрерывной и дважды дифференцируемой на границе области определения.

Первые исследования излагаемого конечно-разностного подхода были реализованы путем решения уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат для расчета температурных полей в тепловыделяющих элементах (ТВЭлах) ЯЭУ. Результаты верификации программы решения уравнения теплопроводности в ТВЭлах продемонстрировали столь

высокое совпадение конечно-разностных расчетов с аналитическими тестами, что было принято решение использовать аналогичный подход и для решения уравнения переноса нейтронов в двухгрупповом диффузионном приближении.

**ВЫВОД КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ МЕТОДА СЕТОК**

Рассмотрим некую функцию  $F$ , зависящую от пространственной координаты  $x$ :

$$F = F(x).$$

Графически зависимость представлена на рис. 1.

Если шаг разностной сетки постоянный (т.е.  $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ ), тогда:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2.$$

В этом случае, аппроксимировав зависимость  $F(x)$  в интервале  $[x_1, x_3]$  полиномом второго порядка  $F(x) = a^2 + bx + c$ , можно вывести конечно-разностную формулу для производных  $F'(x)$  и  $F''(x)$  в зависимости от значения функции  $F(x)$  в узловых точках. Эту зависимость можно получить как с помощью разложения функции  $F(x)$  в ряд Тейлора [3] (в этом случае можно оценить величину отбрасываемого члена), так и чисто алгебраически, решив систему алгебраических уравнений. В последнем случае можно вывести конечно-разностные формулы и для сетки с переменным шагом.

Поскольку в задачах, наиболее часто встречающихся в реакторных расчетах, как правило, достаточно применения сеток с постоянным шагом, разностные формулы с переменным шагом разностной сетки в данной работе рассматриваться не будут.

Для сетки с постоянным шагом производные  $F'(x)$  и  $F''(x)$  примут вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \frac{-3F_1 + 4F_2 - F_3}{2\Delta X} + 0(\Delta x^2); \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = \frac{F_3 - F_1}{2\Delta X} + 0(\Delta x^2); \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_3} = \frac{3F_3 - 4F_2 + F_1}{2\Delta X} + 0(\Delta x^2). \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{x=x_1=x_2=x_3} = \frac{F_3 - 2F_2 + F_1}{\Delta X^2} + 0(\Delta x^2). \tag{4}$$

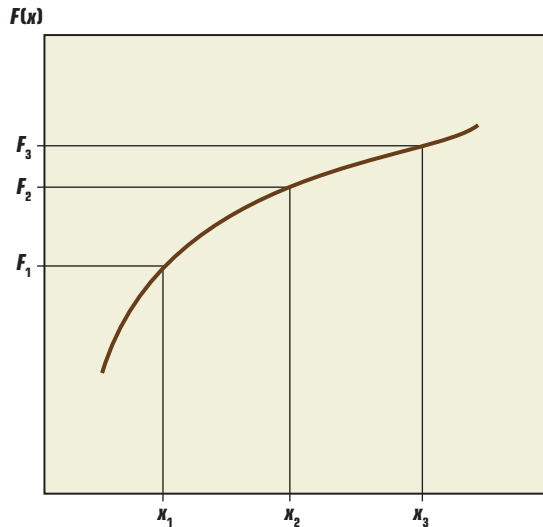


Рис. 1. Зависимость  $F$  от координаты  $x$

Данный конечно-разностный вид записи уравнений будем называть трехточечным шаблоном. Для двухточечного разностного шаблона (линейная аппроксимация) первая производная будет иметь вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_1=x_2} = \frac{F_2 - F_1}{\Delta X} + 0(\Delta x). \tag{5}$$

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ МЕТОДИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Использование методики конечных разностей покажем на примере замены дифференциального уравнения теплопроводности его конечно-разностным аналогом.

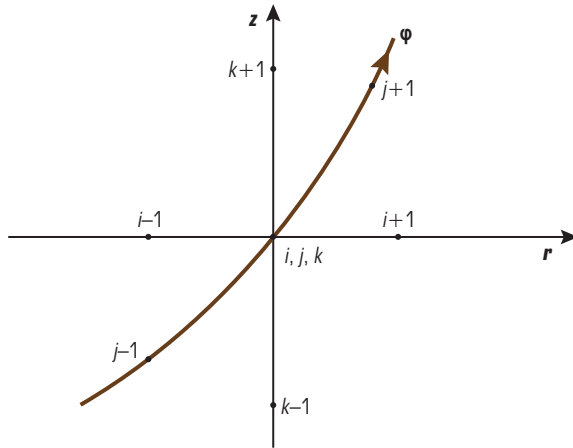
Нестационарное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}(T)) + Q_v, \tag{6}$$

- где:  $\rho$  – плотность;
- $c_p$  – теплоемкость;
- $T$  – температура;
- $\lambda$  – теплопроводность;
- $Q_v$  – объемное энерговыделение.

В цилиндрической системе координат уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial T^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial T^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \lambda \frac{\partial T^2}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + Q_v, \tag{7}$$



▲ Рис. 2. Расчетный шаблон внутренней области

На рис. 2 представлен расчетный шаблон внутренней области.

Конечно-разностное уравнение выведем для внутреннего узла  $i, j, k$ , где индекс  $i$  означает номер узла в радиальном направлении (вдоль оси  $r$ ), индекс  $j$  – в азимутальном направлении (вдоль оси  $\varphi$ ), индекс  $k$  – в осевом направлении (вдоль оси  $z$ ), индекс  $\tau$  – вдоль оси времени (ось  $\tau$ ). Для сокращения выкладок вместо индексов узла, например  $i, j + 1, k, t$ , будем записывать только изменяемый индекс  $j + 1$ .

Для производной по времени для материала с высокой теплоёмкостью можно использовать и двухточечный шаблон (5), однако, тем не менее, воспользуемся трёхточечным шаблоном (3). Тогда:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{3T_{\tau} - 4T_{\tau-1} + T_{\tau-2}}{2\Delta\tau}. \quad (8)$$

Выведем конечно-разностное уравнение для внутреннего (не граничного) узла путём замены производных в уравнении (7) их конечно-разностными аналогами (1)-(4) и (8):

$$\begin{aligned} T_{i,j,k}^{\tau} = & (\rho c_p \frac{4T_{\tau-1} - T_{\tau-2}}{2\Delta\tau} + \\ & + T_{i+1} \left( \frac{\lambda}{\Delta r^2} + \frac{\lambda}{2\Delta r} + \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{4\Delta r^2} \right) + \\ & + T_{i-1} \left( \frac{\lambda}{\Delta r^2} - \frac{\lambda}{2\Delta r} - \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{4\Delta r^2} \right) + \\ & + T_{j+1} \left( \frac{\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{4r^2 \Delta \varphi^2} \right) + \\ & + T_{j-1} \left( \frac{\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2} - \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{4r^2 \Delta \varphi^2} \right) + \\ & + T_{k+1} \left( \frac{\lambda}{\Delta z^2} + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{4\Delta z^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + T_{k-1} \left( \frac{\lambda}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{4\Delta z^2} \right) + \\ & + Q_v) / \left( \rho c_p \frac{3}{2\Delta\tau} + \frac{2\lambda}{\Delta r^2} + \frac{2\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2} + \frac{2\lambda}{\Delta z^2} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Для дальнейшего упрощения выкладок заменим выражения (9) с использованием операторной формы, что позволит расписывать только изменяемую часть уравнения (следует заметить, что составляющие по различным осям координат являются линейно независимыми, так как в дифференциальных уравнениях не присутствуют перекрёстные производные). Переменные, находящиеся в числителе, заменим оператором с индексом 1, в знаменателе – 0).

В нашем примере:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 T &= \rho c_p \frac{4T_{\tau-1} - T_{\tau-2}}{2\Delta\tau}; \\ \hat{\tau}_0 &= \rho c_p \frac{3}{2\Delta\tau}; \\ \hat{R}_1 T &= T_{i+1} \left( \frac{\lambda}{\Delta r^2} + \frac{\lambda}{2\Delta r} + \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{4\Delta r^2} \right) + \\ &+ T_{i-1} \left( \frac{\lambda}{\Delta r^2} - \frac{\lambda}{2\Delta r} - \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{4\Delta r^2} \right); \\ \hat{R}_0 &= \frac{2\lambda}{\Delta r^2}; \\ \hat{\varphi}_1 T &= T_{j+1} \left( \frac{\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{4r^2 \Delta \varphi^2} \right) + \\ &+ T_{j-1} \left( \frac{\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2} - \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{4r^2 \Delta \varphi^2} \right); \\ \hat{\varphi}_0 &= \frac{2\lambda}{r^2 \Delta \varphi^2}; \\ \hat{Z}_1 T &= T_{k+1} \left( \frac{\lambda}{\Delta z^2} + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{4\Delta z^2} \right) + T_{k-1} \left( \frac{\lambda}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_{k-1}}{4\Delta z^2} \right); \\ \hat{Z}_0 &= \frac{2\lambda}{\Delta z^2}. \end{aligned}$$

Тогда в операторной форме конечно-разностное уравнение примет вид:

$$T_{i,j,k}^{\tau} = \frac{\hat{\tau}_1 T + \hat{R}_1 T + \hat{\varphi}_1 T + \hat{Z}_1 T + Q_v}{\hat{\tau}_0 + \hat{R}_0 + \hat{\varphi}_0 + \hat{Z}_0}. \quad (10)$$

### ВЫВОД КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ УЗЛОВ РАСЧЁТНОЙ ОБЛАСТИ

Граничное условие первого рода:

$$T|_{x=x_f} = T_f,$$

где  $T_f$  – температура пограничной поверхности.

Граничное условие первого рода является частным случаем граничного условия третьего рода с очень большим коэффициентом теплоотдачи к внешней среде.

Граничное условие второго рода в реакторных расчетах довольно редко используется на практике, так как предполагает известное значение величины потока через поверхность:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = Q_f, \tag{11}$$

где  $Q_f$  – тепловой поток на поверхности.

Это граничное условие может также рассматриваться, как частный случай граничного условия третьего рода, если  $T_f$  много больше температуры на границе, а произведение  $\alpha$  на  $T_f$  равно тепловому потоку  $Q_f$ .

**ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ТРЕТЬЕГО РОДА**

Граничное условие третьего рода наиболее часто встречается в реакторных расчетах как при решении уравнения теплопроводности, так и при решении уравнения диффузии нейтронов.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = \alpha(T_f - T_s),$$

где:  $T_f$  – температура внешней среды;  
 $T_s$  – температура на границе (поверхности);  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Для вывода уравнения на внешней границе воспользуемся представленным на рис. 3 конечно-разностным шаблоном.

Для простоты вывод конечно-разностного оператора сделаем только для радиальной составляющей с учётом (10):

$$\hat{R}T = \lambda \frac{\partial T^2}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Для простоты выкладок производную теплопроводности по радиусу обозначим как  $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{3\lambda_i - 4\lambda_{i-1} + \lambda_{i-2}}{2\Delta r}. \tag{12}$$

Ниже приведём основной принцип подстановки граничного условия в дифференциальное уравнение, предложенный Григорьевым М.М.

Подстановка во вторую производную производится в два этапа:

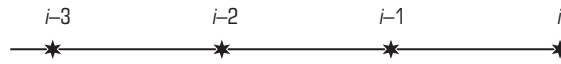


Рис. 3. Конечно-разностный шаблон на внешней границе

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

при этом на первом этапе первую производную по температуре раскрываем по конечно-разностной формуле (3), получим

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta r} \right),$$

далее (запишем предельно подробно, поскольку опыт обучения студентов показал, что подход метода Григорьева удаётся объяснить далеко не всем).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta r} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta r} \left( 3 \frac{\partial T_i}{\partial r} - 4 \frac{\partial T_{i-1}}{\partial r} + \frac{\partial T_{i-2}}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

далее для граничного узла  $i$  вместо производной подставляем само граничное условие, а именно:

$\frac{\partial T_i}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda} (T_f - T_i)$ , вместо производных в остальных узлах подставляем их конечно-разностные аналоги.

$\frac{\partial T_{i-1}}{\partial r} = \frac{T_i - T_{i-1}}{2\Delta r}$ ,  $\frac{\partial T_{i-2}}{\partial r} = \frac{T_{i-1} - T_{i-3}}{2\Delta r}$ , (четырёхточечный шаблон) или  $\frac{\partial T_{i-2}}{\partial r} = \frac{-3T_{i-2} + 4T_{i-1} - T_i}{2\Delta r}$  (трёхточечный шаблон). Применение четырёхточечного шаблона накладывает требование к минимальному числу узлов сетки в четыре точки.

В итоге (трёхточечный шаблон) получим значение второй производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2}{\partial r^2} &= \frac{1}{2\Delta r} \left( 3 \frac{\alpha}{\lambda} (T_f - T_i) - \right. \\ &\left. - 4 \frac{T_i - T_{i-2}}{2\Delta r^2} + \frac{-3T_{i-2} + 4T_{i-1} - T_i}{4\Delta r^2} \right). \end{aligned}$$

Или после приведения однородных членов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2}{\partial r^2} &= -T_i \left( \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{5}{4\Delta r^2} \right) + T_{i-1} \frac{1}{\Delta r^2} + \\ &+ T_{i-2} \frac{1}{4\Delta r^2} + T_f \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda}. \end{aligned} \tag{13}$$

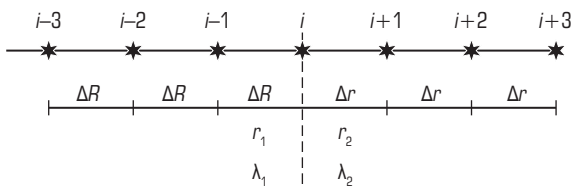


Рис. 4. Разностная сетка для граничного условия четвертого рода

Следует подчеркнуть, что перед температурой в правой части в точке  $i$  получился отрицательный знак, перед остальными температурами – положительный (это признак отсутствия ошибок).

Ну и первая производная с учётом (11):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \frac{\alpha}{\lambda} (T_f - T_i) = \\ &= T_f \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - T_i \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Объединив (13) и (14) получим:

$$\begin{aligned} \hat{R}T &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = \\ &= -T_i \left( \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{5}{4\Delta r^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) + T_{i-1} \frac{1}{\Delta r^2} + \\ &+ T_{i-2} \frac{1}{4\Delta r^2} + T_f \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + T_f \left( \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Откуда:

$$\hat{R}_0 = \left( \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{5}{4\Delta r^2} + \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 T &= T_{i-1} \frac{1}{\Delta r^2} + T_{i-2} \frac{1}{4\Delta r^2} + \\ &+ T_f \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + T_f \left( \frac{3}{2\Delta r} \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (16) и (17) в (10) получим конечно-разностное уравнение в операторной форме для отражателя по радиусу.

В аксиальном и азимутальном направлении вывод уравнения для граничного условия третьего рода полностью аналогичен.

### ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ЧЕТВЕРТОГО РОДА

Граничное условие четвертого рода – это граничное условие между идеально соприкасающимися теплопроводящими материалами, как правило, различающимися по своим теплофизическим свойствам.

Граничное условие четвертого рода состоит из условий неразрывности функционала:

$$T \Big|_{\text{слева}} = T \Big|_{\text{справа}}$$

и величины тока:

$$\lambda_{\text{слева}} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{слева}} = \lambda_{\text{справа}} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{справа}}.$$

В дальнейшем свойствам среды слева будем присваивать индекс “1”, свойствам справа – “2”.

Внутренняя граница в сплошной среде может быть как реальной (контакт материалов с разными теплофизическими свойствами), так и фиктивной, например, если нужно изменить шаг разностной сетки или имеется различное энерговыделение. Разностная сетка представлена на рис. 4.

При выводе уравнений для внутренней границы (граничное условие четвертого рода) разностное уравнение записывается сначала для границы слева, затем для границы справа (в итоге получаем условие сшивки токов), а полученные разностные уравнения складываются (это есть условие сшивки функционалов). Следует подчеркнуть, что уравнения “слева” и “справа” выводятся не только для радиальной составляющей диффузионного оператора (в нашем примере), а для всего уравнения в целом (т.е. операторы  $\hat{\tau}_1 T$ ,  $\hat{\tau}_0$ ,  $\hat{R}_1 T$ ,  $\hat{R}_0$ ,  $\hat{\Phi}_1 T$ ,  $\hat{\Phi}_0$ ,  $\hat{Z}_1 T$ ,  $\hat{Z}_0$  получаются для каждой границы отдельно).

Для граничного условия четвертого рода столь подробно вывод подстановки в производные их численных аналогов производить не будем.

Шаги по радиусу (в соответствии с рисунком 3) слева от границы обозначим как  $\Delta R$ , справа – как  $\Delta r$ .

### КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СЛЕВА ОТ ГРАНИЦЫ

Итак, конечно-разностное выражение для производной для узла  $i$  слева от границы:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\text{слева}} = \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta R},$$

и справа от границы:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{\text{справа}} = \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta r}.$$

Граничное условие справа от границы:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{справа} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta r}, \text{ и слева от гра-}$$

$$\text{ницы: } \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{слева} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta R}.$$

Итак, конечно-разностное уравнение слева от границы будет иметь вид (способ подстановки производных полностью аналогичен граничному условию третьего рода):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta R} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta R} \left( 3 \frac{\partial T_i}{\partial r} - 4 \frac{\partial T_{i-1}}{\partial r} + \frac{\partial T_{i-2}}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta R} \left( 3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta r} - \right. \\ &- 4 \frac{T_i - T_{i-2}}{2\Delta R} + \frac{-3T_{i+2} + 4T_{i-1} - T_i}{4\Delta R} \left. \right) = \\ &= -T_i \left( \frac{5}{4\Delta R^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{9}{4\Delta R\Delta r} \right) + T_{i-1} \frac{1}{\Delta R^2} + \\ &+ T_{i-2} \frac{1}{4\Delta R^2} + T_{i+1} \frac{12\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r} - T_{i+2} \frac{3\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставим граничное условие в члены, содержащие первую производную по радиусу:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta r} = \\ &= -T_i \frac{3\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + T_{i+1} \frac{4\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - \\ &- T_{i+2} \frac{\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Объединив (18) и (19) получим:

$$\begin{aligned} \hat{R}_i T &= -T_i \left( \frac{5}{4\Delta R^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{9}{4\Delta R\Delta r} + \frac{3\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ T_{i-1} \frac{1}{\Delta R^2} + T_{i-2} \frac{1}{4\Delta R^2} + \\ &+ T_{i+1} \left( \frac{12\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r} + \frac{4\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) - \\ &- T_{i+2} \left( \frac{3\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r} + \frac{\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned}$$

Индекс “i” указывает, что уравнение записано слева от границы. Откуда:

$$\hat{R}_{0l} = \frac{5}{4\Delta R^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{9}{4\Delta R\Delta r} + \frac{3\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ii} T &= T_{i-1} \frac{1}{\Delta R^2} + T_{i-2} \frac{1}{4\Delta R^2} + \\ &+ T_{i+1} \left( \frac{12\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r} + \frac{4\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) - \\ &- T_{i+2} \left( \frac{3\lambda_2}{4\lambda_1\Delta R\Delta r} + \frac{\lambda_2}{2\Delta r\lambda_1} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

При выводе конечно-разностных уравнений мы умышленно не привели отношения типа  $1/4$  для того, чтобы было понятно, откуда взялась эта дробь.

### КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СПРАВА ОТ ГРАНИЦЫ

Конечно-разностное уравнение справа от границы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta r} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta r} \left( -3 \frac{\partial T_i}{\partial r} + 4 \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} - \frac{\partial T_{i+2}}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{2\Delta r} \left( -3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta R} + \right. \\ &+ 4 \frac{T_i - T_{i+2}}{2\Delta r} + \frac{3T_{i+2} - 4T_{i+1} - T_i}{4\Delta r} \left. \right) = \\ &= -T_i \left( \frac{5}{4\Delta R^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{9}{4\Delta R\Delta r} \right) + T_{i+1} \frac{1}{\Delta R^2} + \\ &+ T_{i+2} \frac{1}{4\Delta R^2} + T_{i-1} \frac{12\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R} - T_{i-2} \frac{3\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R}. \end{aligned} \quad (22)$$

И члены с первой производной:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} &= \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta R} = \\ &= T_i \frac{3\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) - T_{i-1} \frac{4\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + \\ &+ T_{i-2} \frac{\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Или:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ii} T &= -T_i \left( \frac{5}{4\Delta R^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{9}{4\Delta R\Delta r} - \frac{3\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ T_{i+1} \frac{1}{\Delta R^2} + T_{i+2} \frac{1}{4\Delta R^2} + \\ &+ T_{i-1} \left( \frac{12\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R} - \frac{4\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right) - \\ &- T_{i-2} \left( \frac{3\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R} - \frac{\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned}$$

Индекс “r” указывает, что уравнение записано справа от границы.

$$\hat{R}_{0r} = \frac{5}{4\Delta r^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{9}{4\Delta r\Delta R} - \frac{3\lambda_1}{2\Delta r\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{1r}T = & T_{i+1} \frac{1}{\Delta r^2} + T_{i+2} \frac{1}{4\Delta r^2} + \\ & + T_{i-1} \left( \frac{12\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R} - \frac{4\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) \right) - \\ & - T_{i-2} \left( \frac{3\lambda_1}{4\lambda_2\Delta r\Delta R} - \frac{\lambda_1}{2\Delta R\lambda_2} \left( \frac{\lambda}{r} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \right) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Окончательно в операторной форме, сложив левую и правую часть уравнений, (20), (21), (24) и (25), тем самым выполнив условие сшивки функционалов и приняв во внимание, что слева и справа от границы члены по азимуту и по высоте также различны, получим уравнение теплопроводности для узла на границе:

$$T_{i,j,k}^\tau = \frac{\hat{\tau}_{1l}T + \hat{\tau}_{1r}T + \hat{R}_{1l}T + \hat{R}_{1r}T + \hat{\phi}_{1l}T + \hat{\phi}_{1r}T + \hat{Z}_{1l}T + \hat{Z}_{1r}T + Q_{vl} + Q_{vr}}{\hat{\tau}_{0l} + \hat{\tau}_{0r} + \hat{R}_{0l} + \hat{R}_{0r} + \hat{\phi}_{0l} + \hat{\phi}_{0r} + \hat{Z}_{0l} + \hat{Z}_{0r}}.$$

**ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ**

Изложенная выше методика реализована в программном комплексе “RAINBOW-TRP” [4, 5] для решения уравнения теплопроводности в тепловыделяющих элементах. Все верификационные расчеты выполнены непосредственно по программному комплексу “RAINBOW-TRP”.

**Расчет стационарного распределения температуры в ТВЭЛ**

Исходные данные для проведения данного расчета следующие:  
 Радиус энерговывделяющего сердечника ..... 0,015 м;  
 Объемное энерговывделение ... 71,13·10<sup>6</sup> Вт/м<sup>3</sup>;  
 Теплопроводность сердечника ..0,98 Вт/(м·К);  
 Температура теплоносителя ..... 6,0 °С;  
 Коэффициент теплоотдачи .. 44 120 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Сопоставление с аналитическим расчетом приведено в таблице 1.

Как следует из таблицы 1, отличие между аналитическим расчетом и расчетом по сеточной методике, реализованной в ПК RAINBOW-TRP, составляет величину порядка 0,035 % для всех точек, кроме пограничной.

Для пограничной точки определить отклонение не позволяет точность, с которой результаты расчета выводятся на печать. Однако ошибка составляет не более 0,1 %.

**Расчет охлаждения цилиндра при ступенчатом изменении температуры среды**

Рассмотрено охлаждение для двух значений теплопроводности цилиндра: 980 и 98 Вт/(м·К).

Исходные данные следующие:  
 Плотность цилиндра ..... 7900 кг/м<sup>3</sup>;  
 Теплоемкость цилиндра ..... 419,0 Дж/кг;  
 Начальная температура цилиндра ..... 353 °С;  
 Температура окружающей среды (T<sub>min</sub>) .... 6,2 °С;  
 Коэффициент теплоотдачи .... 41 900 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Результаты расчета охлаждения цилиндра с теплопроводностью 980 Вт/(м·К) представлено на рис. 5, теплопроводностью 98 Вт/(м·К) на рис. 6.

Отклонение в расчете весьма незначительно, поэтому отличить на графиках аналитический расчет от сеточного весьма трудно. На всех рисунках графики температуры, рассчитанные по сеточной методике, расположены ниже аналитического расчета. Это отклонение объясняется тем, что в начале переходного процесса расчетный коэффициент теплоотдачи был несколько выше от принятого для аналитического расчета. Тем не менее, максимальное отклонение в расчетах от аналитического не превысило 2 °С, что составляет величину порядка 0,8 % от разности между начальной и конечной температурами.

**Расчет нагревания цилиндра при ступенчатом включении внутреннего источника энерговывделения**

При моделировании данного режима приняты следующие исходные данные:

Плотность цилиндра ..... 7900 кг/м<sup>3</sup>;  
 Теплоемкость цилиндра ..... 419,0 Дж/кг;  
 Начальная температура цилиндра ..... 6 °С;  
 Теплопроводность цилиндра .... 0,98 Вт/(м·К);  
 Температура окружающей среды (T<sub>min</sub>) ..... 6 °С;  
 Коэффициент теплоотдачи .... 41 900 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

**Таблица 1. Сопоставление с аналитическим расчетом**

<b>Радиус, м</b>	0,0	0,005	0,010	0,015
<b>Аналитический расчет, °С</b>	4100,8	3647,2	2286,3	18,09
<b>TRP, °С</b>	4099,4	3646,0	2285,8	18,1

Результаты расчета представлены на рис. 7. Отклонение в расчете столь незначительно, что отличить на графиках аналитический расчет от сеточного весьма трудно. Тем не менее, графики сеточного расчета несколько ниже от графиков аналитического расчета.

Максимальное отклонение сеточного расчета от аналитического составляет 5 °С, что относительно изменения температуры на 3600 °С составляет 0,14 %.

Таким образом, было показано, что для задач, поддающихся аналитическому решению, точность расчета температурных полей в твэлах по сеточной программе не хуже 0,8 % в динамических режимах и не хуже 0,1 % для стационарного расчета.

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ МЕТОДИКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ НЕЙТРОНОВ**

Ниже рассмотрено применение конечно-разностной методики для решения уравнений диффузии нейтронов. Структура этого уравнения имеет аналогичный вид со структурой уравнения теплопроводности, что позволяет использовать тот же подход, как и для уравнения теплопроводности.

Уравнение кинетики в общем виде в диффузионном приближении для быстрой группы [6, 7] имеет вид:

$$\frac{1}{V_1} \frac{\partial F_1}{\partial \tau} = \nabla(D_1 \nabla(F_1)) + \Psi(1 - \beta) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i - (\Sigma_{зам} + \Sigma_{a1}) F_1 .$$

Для тепловой группы:

$$\frac{1}{V_2} \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = \nabla(D_2 \nabla(F_2)) + \Sigma_{зам} F_1 - \Sigma_{a2} F_2 ,$$

- где:  $F$  – плотность потока нейтронов;
- $V$  – скорость нейтронов;
- $D$  – коэффициент диффузии;
- $\Psi = \nu_{f1} \Sigma_{f1} F_1 + \nu_{f2} \Sigma_{f2} F_2$  – источник нейтронов;
- $\nu_f$  – выход нейтронов на акт деления;
- $\Sigma_f$  – сечение деления;
- $\lambda$  – постоянная распада источников запаздывающих нейтронов;
- $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i$  – доля запаздывающих нейтронов;
- $C$  – концентрация источников запаздывающих нейтронов;
- $\Sigma_{зам}$  – сечение замедления;
- $\Sigma_a$  – сечение поглощения.

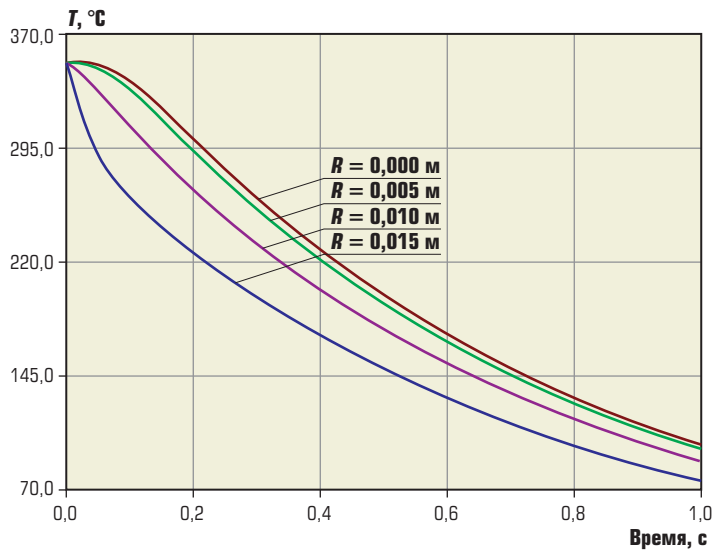


Рис. 5. Температура цилиндра

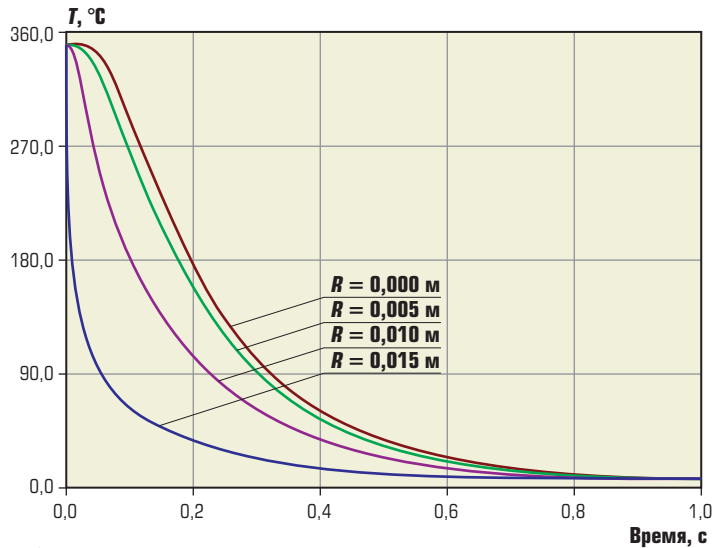


Рис. 6. Температура цилиндра

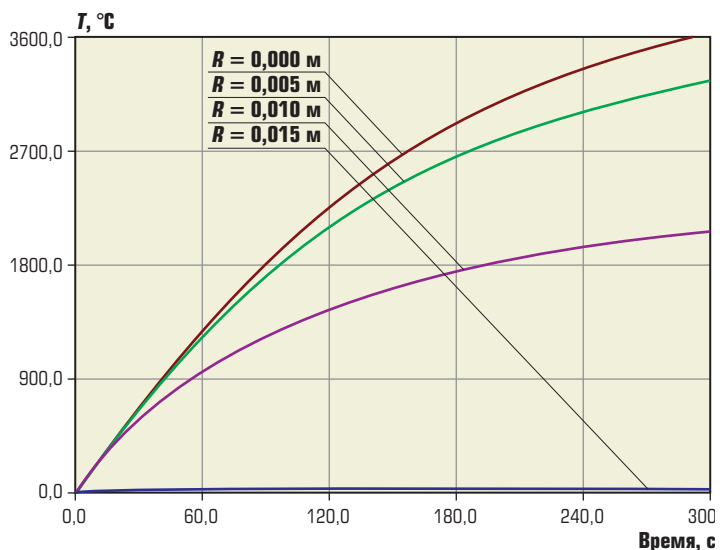


Рис. 7. Температура цилиндра

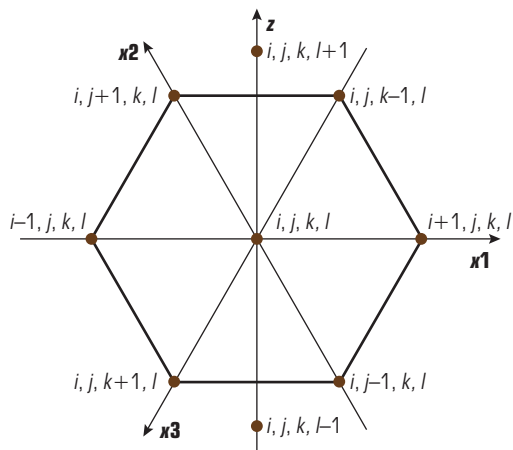


Рис. 8. Расчетный шаблон

Уравнение для запаздывающих нейтронов:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \beta_i \Psi - \lambda_i C_i.$$

Поскольку разрабатываемая методика предназначена для моделирования реакторных установок водо-водяного типа, имеющих топливные сборки в форме призмы с шестигранником в основании, воспользуемся преобразованием оператора  $\nabla(D\nabla(F))$  из декартовой системы координат в неортогональную (в плане) гексагональную систему координат.

Расчетный шаблон представлен на рис. 8. Точками на рисунке обозначены расчетные узлы на границах между соседними кассетами.

$$\nabla(D\nabla(F)) = \nabla(D)\nabla(F) + D\Delta F;$$

$$\Delta F = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial X_3^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2};$$

$$\nabla(D)\nabla(F) = \frac{2}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial D}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial D}{\partial X_2} + \frac{\partial F}{\partial X_3} \cdot \frac{\partial D}{\partial X_3} \right) + \frac{\partial F}{\partial Z} \cdot \frac{\partial D}{\partial Z} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}. \quad (26)$$

В качестве примера для вывода метода изображения потока рассмотрим поле потока нейтронов на границе между ячейками с различными коэффициентами диффузии, как это показано на рис. 9.

Запишем условие сшивки токов нейтронов на границе:

$$D_i \frac{\partial F_i}{\partial X} \Big|_{\Gamma} = D_{i+1} \frac{\partial F_{i+1}}{\partial X} \Big|_{\Gamma}.$$

Тогда можем записать в разностном виде:

$$D_i \frac{F_{\Gamma} - F_i}{H/2} = D_{i+1} \frac{F_{i+1} - F_{\Gamma}}{H/2},$$

где  $F_{\Gamma}$  – значение потока на границе.

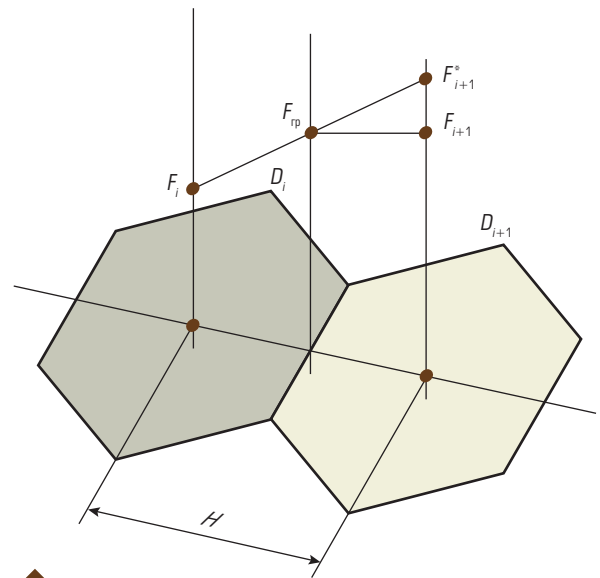


Рис. 9. Расчётная схема

Откуда:

$$F_{\Gamma} = \frac{F_{i+1} D_{i+1} + F_i D_i}{D_i + D_{i+1}};$$

$$F_{i+1}^* = F_i + \frac{dF}{dX} H = F_i + 2 \frac{F_{\Gamma} - F_i}{H} H = 2F_{\Gamma} - F_i;$$

$$F_{i+1}^* = \frac{2F_{i+1} D_{i+1} + F_i (D_i - D_{i+1})}{D_i + D_{i+1}}.$$

Опыт эксплуатации программы показал, что в аксиальном направлении целесообразно применить для внутренних узлов метод изображения потока (см. выше), а для узлов на границе с торцевыми отражателями использовать тот же подход, что и для уравнения теплопроводности на внешней границе (граничное условие третьего рода).

Расчетная схема представлена на рис. 10.

Поскольку в пределах кассеты нейтронно-физические свойства среды однородны (в соответствии со способом подготовки нейтронно-физических сечений), существуют три различных по типу узла разностного уравнения:

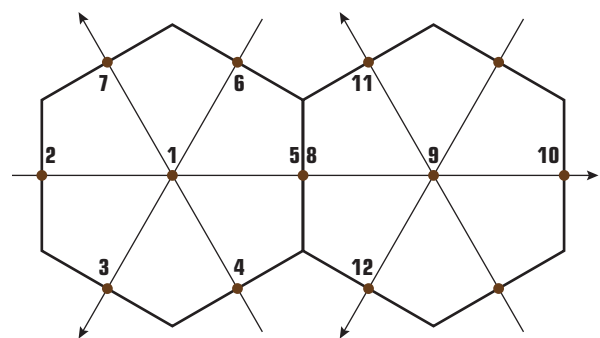


Рис. 10. Расчётная схема

- узел в центре кассеты (узел 1). Разностное уравнение в узле 1 аналогично уравнению для одноточечной разностной сетки. В отличие от одноточечной модели, в данном приближении уравнение в узле 1 существенно проще, так как свойства среды в узлах 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 одинаковы;
- узел на границе с отражателем (узлы 2, 3, 7 в нашем примере). Уравнение в данном узле аналогично граничному условию для торцевого отражателя;
- узел на границе между кассетами (узлы 4, 5, 6).

Для уменьшения громоздкости выкладок обозначим:

- источник нейтронов (как за счет деления, включая запаздывающие нейтроны, так и за счет увода из верхней группы), деленный на коэффициент диффузии как  $\hat{\Psi}$ ;
- $\frac{1}{DV} \frac{\partial F}{\partial \tau}$  как  $\hat{V}F$ ;
- увод нейтронов, деленный на коэффициент диффузии как  $\hat{\Sigma}$ ;
- $h = H/2$ .

Разностное уравнение для центральных узлов кассет получается автоматически из (26):

$$F = \frac{\frac{2}{3h^2}(F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7) + \hat{B}_{Z1}F + \hat{V}_1F + \hat{\Psi}}{\hat{B}_{Z0} + \frac{4}{h^2} + \hat{\Sigma} + \hat{V}_0},$$

где  $\hat{B}_Z$  – оператор утечки по высоте зоны (аналогичен оператору  $\hat{Z}$  в уравнении теплопроводности);

$$\hat{V} = \frac{1}{V} \frac{3F_{\tau} - 4F_{\tau-1} + F_{\tau-2}}{2\Delta\tau}.$$

Вид разностного оператора в аксиальном направлении для узлов на границе с торцевым отражателем полностью аналогичен граничному условию третьего рода в уравнении теплопроводности, а для внутренних узлов будет иметь следующий вид:

$$\hat{B}_Z F = \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = \frac{F_{i+1}^* - 2F_i + F_{i-1}^*}{\Delta Z^2}.$$

### УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УЗЛА НА ГРАНИЦЕ С РАДИАЛЬНЫМ ОТРАЖАТЕЛЕМ

Для узлов, расположенных на границе кассеты, применен лапласиан для цилиндрических координат. И хотя в действительности данный оператор лишь приближенно описывает диффузию в реальной гексагональной

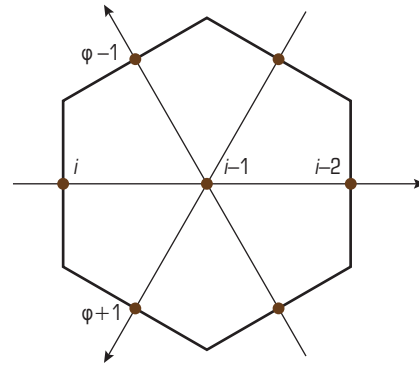


Рис. 11. Расчётная схема

геометрии, результаты верификации разностного уравнения продемонстрировали обоснованность такого подхода.

Для узлов на границе кассеты (как на границе с радиальным отражателем, так и на границе с другой кассетой) воспользуемся оператором Лапласа для цилиндрических координат:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2},$$

где  $r = \Delta r = \frac{H}{2}$  (половина расстояния между центрами кассет);

$$\Delta \phi = \frac{\pi}{3}.$$

В отличие от уравнения на границе с торцевым отражателем, мы располагаем только тремя расчетными узлами с однородными свойствами, принадлежащими данной кассете. Поэтому полученное разностное уравнение будет несколько отличаться от уравнения для торцевого отражателя. Расчетная схема представлена на рис. 11.

Разностное уравнение для радиальной составляющей оператора Лапласа раскроем по трем узлам, заменив производную в узле  $i$  граничным условием  $D \frac{\partial F}{\partial r} = -\alpha_1 F_i + \alpha_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} &= \\ &= \frac{d}{d\phi} \left( \frac{3F_i - 4F_{i-1} + F_{i-2}}{2\Delta r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{-\alpha_1 F_i + \alpha_2}{D} \right). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} &= \\ &= \frac{-\alpha_1 F_i + \alpha_2}{D} \left( \frac{3}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{5F_i}{4r^2} + \frac{F_{i-1}}{r^2} + \frac{F_{i-2}}{4r^2}. \end{aligned}$$

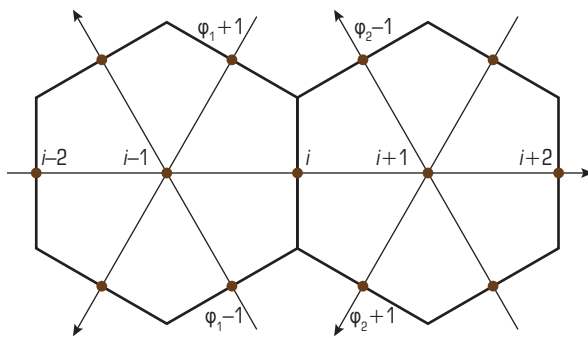


Рис. 12. Расчетная схема между кассетами

Полное конечно-разностное выражение для потока в узле  $i$  имеет вид:

$$F_i = \frac{\hat{V}F + \hat{\Psi} + \hat{B}_z^2 F + \frac{F_{i-1}}{r^2} + \frac{F_{i-2}}{4r^2} + \frac{F_{\varphi+1} + F_{\varphi-1}}{r^2 \Delta\varphi^2} + \frac{\alpha_2}{D} \left( \frac{3}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \right)}{\hat{V} + \hat{\Sigma} + \hat{B}_z^2 + \frac{\alpha_1}{D} \left( \frac{3}{2\Delta r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{5}{4r^2} + \frac{2}{r^2 \Delta\varphi^2}}$$

**УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УЗЛА МЕЖДУ КАССЕТАМИ**

Уравнение для узла на границе между кассетами получается путем сложения уравнений, полученных последовательно в узле справа и слева от границы.

Расчетная схема представлена на рис. 12.

Граничное условие на границе имеет вид:

$$D_1 \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{\text{слева}} = D_2 \frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{\text{справа}}$$

Разностное выражение для производной имеет вид:

- для левой границы  $-\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{3F_i - 4F_{i-1} + F_{i-2}}{2\Delta r}$ ;
- для правой границы  $-\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{-3F_i + 4F_{i+1} - F_{i+2}}{2\Delta r}$ .

Произведя подстановку в разностное уравнение граничных условий сначала для левой, а затем для правой границы и сложив полученные уравнения по аналогии с граничным условием для уравнения теплопроводности, получим окончательный вид разностного уравнения для узла на границе между кассетами:

$$\hat{V}_1 F + \hat{V}_2 F + \hat{\Psi}_1 + \hat{\Psi}_2 + \hat{B}_{z1}^2 F + \hat{B}_{z2}^2 F + (\hat{\Sigma}_1 + \hat{\Sigma}_2) F = \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{D_2}{2\Delta r D_1} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{2\Delta r} \right) \right) F_{i+2} + \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{2D_2}{\Delta r D_1} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{2\Delta r} \right) \right) F_{i+1} +$$

$$+ \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{2D_1}{\Delta r D_2} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{2\Delta r} \right) \right) F_{i-1} + \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{D_1}{2\Delta r D_2} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{2\Delta r} \right) \right) F_{i-2} - \left( \frac{3}{2\Delta r} \left( \frac{1}{r} + \frac{3}{2\Delta r} \right) \left( \frac{D_2}{D_1} + \frac{D_1}{D_2} \right) + \frac{5}{2\Delta r^2} + \frac{4}{r^2 \Delta\varphi^2} \right) F_i + \frac{F_{\varphi+1} + F_{\varphi-1}}{r^2 \Delta\varphi^2} + \frac{F_{\varphi+2} + F_{\varphi-2}}{r^2 \Delta\varphi^2}$$

Индексы 1 и 2 относятся к нейтронно-физическим свойствам соответственно для кассет слева и справа от границы.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Приведено систематизированное изложение метода решения диффузионных уравнений как для уравнения теплопроводности, так и для переноса нейтронов, реализованного в программном комплексе “RAINBOW-TRP”.

Представлены результаты верификации метода сеток применительно к решению уравнения теплопроводности. Показана высокая точность конечно-разностного уравнения при решении уравнения теплопроводности.

Результаты верификации методик решения уравнений переноса нейтронов, реализованных в п/к “RAINBOW-TRP”, докладывалась на семинарах “НЕЙТРОНИКА-95” – НЕЙТРОНИКА-99” [8-11]. Продемонстрирована хорошая точность решения уравнений нейтронной кинетики методом сеток в двухгрупповом диффузионном гексагональном приближении.

**Список литературы**

1. Кавун О.Ю., Григорьев М.М. О применении метода конечных разностей в реакторных расчётах// Сборник трудов ГНИПКИИ “Атомэнергопроект”, вып. 2. Москва. 2001, с. 82-108.
2. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука. 1976, 304 с.
3. Троицкий В.А. и др. Инженерные расчеты на ЭВМ. – М.: Машиностроение. 1979, 286 с.
4. Кавун О.Ю. Методика моделирования динамики энергоблока АЭС, реализованная в программном комплексе РАДУГА-ЭУ// Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Физика ядерных реакторов. – М.: 1999, вып. 2, с. 17-39.

5. Программный комплекс “РАДУГА/RAINBOW” с библиотекой нейтронно-физических сечений серийного реактора ВВЭР-1000// Федеральный надзор России по ядерной и радиационной безопасности: Аттестационный паспорт на программное средство № 62 от 17.10.1996. – М.: 1996, 7 с.
6. Ганев И.Х. Физика и расчет реактора. – М.: Энергоиздат. 1981, 352 с.
7. Галанин А.Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. – М.: Энергоатомиздат. 1984, 348 с.
8. Кавун О.Ю., Таранов Г.С. Программный комплекс “РАДУГА/RAINBOW” с трехмерной двухгрупповой моделью активной зоны, моделирующий динамические процессы в РУ ВВЭР, и результаты верификации нейтронно-физического модуля // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов НЕЙТРОНИКА-95: Сб. трудов семинара МАЭ РФ. – Обнинск. 1997, с. 41-47.
9. Кавун О.Ю., Таранов Г.С. Математическая модель нейтронно-физического модуля программного комплекса “РАДУГА/RAINBOW” // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов НЕЙТРОНИКА-96: Сб. трудов семинара МАЭ РФ. – Обнинск. 1998, с. 14-38.
10. Кавун О.Ю., Суслов И.Р., Попыкин А.И. Разработка системы кинетических тестов для реакторов ВВЭР-1000 и ВВЭР-440 // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов НЕЙТРОНИКА-98: Сб. трудов семинара МАЭ РФ. – Обнинск. 1999, с. 72-77.
11. Кавун О.Ю. Усовершенствованная методика моделирования нейтроннофизических полей в программном комплексе “РАДУГА/RAINBOW-7” // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов НЕЙТРОНИКА-99: Сб. трудов семинара МАЭ РФ. – Обнинск. 2000, с. 237-245.

*Кавун Олег Юрьевич – д-р техн. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
Григорьев Михаил Матвеевич – ФГУП НИПКИИ “Атомэнергопроект”*